ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—————————o0o—————————

LÝ HOÀNG ANH

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 11/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

LÝ HOÀNG ANH

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

TS. TRẦN XUÂN QUÝ

THÁI NGUYÊN, 11/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\prod_{j=1}^{n} a_j$	$a_1a_2 \ldots a_n$
$\sum_{j=1}^{n} a_j$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$C^1([a,b])$	tập hợp các hàm khả vi liên tục trên đoạn $[a,b]$
$L^p([a,b])$	tập các hàm khả tích cấp p trên đoạn $[a,b]$
$\max\{x,y\}$	phần tử lớn nhất trong tập hợp $\{x,y\}$
(α,β)	$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$
ε	$(1, 1, ..., 1)$
(α^t, ε)	$\sum_{k=1}^{n} a_k^t$
$((\alpha,\beta), e)$	$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k e_k$

Mở đầu

Môn Toán có một vị trí rất quan trọng trong trường phổ thông, nó phối hợp với các môn khác và các hoạt động khác trong nhà trường, góp phần giáo dục toàn diện học sinh. Do vai trò to lớn của toán học trong đời sống khoa học kỹ thuật hiện đại nên các kiến thức và phương pháp toán học là công cụ thiết yếu giúp cho học sinh học tập tốt các môn học khác, giúp cho các em học sinh phát triển các năng lực tư duy và phẩm chất trí tuệ, rèn luyện óc trừu tượng, suy luận hợp logíc. Ngoài ra nó còn giúp cho học sinh tính cần cù nhẫn nại, tự lực tự cường, tính cẩn thận, chính xác...

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề hay và khó nhất của chương trình toán phổ thông bởi nó có mặt ở hầu hết các lĩnh vực của toán học và nó đòi hỏi phải có một vốn kiến thức tương đối vững vàng trên tất cả các lĩnh vực. Mỗi người chúng ta, đặc biệt là các bạn yêu toán, dù ít dù nhiều thì cũng từng đau đầu trước một bất đẳng thức khó và cũng đã từng có một cảm giác tự hào và phấn khích mà mình chứng minh được bất đẳng thức đó. Nhằm "kích hoạt" niềm say mê bất đẳng thức cho học sinh, tôi thực hiện nghiên cứu đề tài về bất đẳng thức. Mặt khác, đã có nhiều nhà toán học có những đóng góp quan trọng cho lý thuyết này như Jensen, Hardy... trong đó đặc biệt là Hölder. Bất đẳng thức mang tên ông được ứng dụng rộng rãi trong giải toán cao cấp và sơ cấp, và đặc biệt trong các đề thi học sinh giỏi. Chính vì thế, bản thân tôi nhận thấy việc nghiên cứu bất đẳng thức Hölder có ý nghĩa đặc biệt quan trọng. Nó giúp tôi có cái nhìn tốt hơn trong việc định hướng ôn tập cho học sinh tham dự các kì thi học sinh giỏi các cấp, thi quốc gia. Bởi vậy tôi lựa chọn đề tài "Về bất đẳng thức Hölder và ứng dụng" cho luận văn thạc sĩ của mình.

Nội dung của đề tài được trình bày trong hai chương.

Chương 1 trình bày một số bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức AM–GM và vấn đề chính là tính tương đương giữa các bất đẳng thức AM–GM suy rộng, bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức trung bình lũy thừa suy rộng, một số bài toán áp dụng. Các kết quả của Chương 1 được tổng hợp từ các tài liệu [8], [9] và một số đề thi học sinh giỏi liên quan.

Chương 2 trình bày về bất đẳng thức Hölder suy rộng, một số biến thể của bất đẳng thức này và dạng ngược của nó và đặc biệt là một số mở rộng của dạng ngược của bất đẳng thức Hölder. Nội dung của Chương 2 được tổng hợp từ các tài liệu [7],[11], [13].

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới 02 thầy hướng dẫn khoa học TS. Trần Xuân Quý, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và TS. Lê Văn Hiếu, Học viện Báo chí và Tuyên truyền đã tận tình hướng dẫn, hết lòng giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu để hoàn thành luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo giảng dạy chuyên nghành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong quá trình thực hiện luận văn.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới Ban lãnh đạo cùng các thầy cô khoa Toán–Tin, phòng Đào tạo, trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho em trong quá trình học tập, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp và Ban giám hiệu trường PTDT BT TH&THCS Đồng Lâm 2. Nhân dịp này tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đã động viên, tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 11 năm 2018

Học viên

Lý Hoàng Anh

Chương 1

Bất đẳng thức Hölder và một số bài toán áp dụng

Chương này, chúng tôi tập trung trình bày một số bất đẳng thức cơ bản, đây là những bất đẳng thức cốt lõi của Toán sơ cấp, chẳng hạn như bất đẳng thức AM–GM, bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Cauchy–Schwarz. Tuy nhiên trọng tâm khai thác vẫn là bất đẳng thức Hölder. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [8], [9].

1.1 Một số bất đẳng thức cơ bản

1.1.1 Bất đẳng thức AM–GM

Định lý 1.1.1 (Bất đẳng thức AM–GM)**.** *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm. Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{1.1}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dưới đây ta có phát biểu của bất đẳng thức AM–GM "suy rộng".

Định lý 1.1.2 (Bất đẳng thức AM–GM suy rộng)**.** *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các số thực dương sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \geqslant a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}. \tag{1.2}$$

Hay

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \geqslant \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}. \tag{1.3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.1.2 Bất đẳng thức Jensen

Định lý 1.1.3 (Bất đẳng thức Jensen)**.** *Giả sử* f *là hàm lồi trên* $[a,b]$ *và* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. *Khi đó,*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{1.4}$$

Nếu hàm f *lõm thì ta có bất đẳng thức chiều ngược lại.*

Bất đẳng thức trên được phát biểu tổng quát như sau.

Định lý 1.1.4. *Cho* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là một hàm lồi trên đoạn* $[a,b]$. *Giả sử* $x_i \in [a,b]$, $p_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *và* $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$. *Khi đó ta có*

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \tag{1.5}$$

1.1.3 Bất đẳng thức Hölder

Bất đẳng thức Hölder tồn tại ở nhiều phiên bản, tuy nhiên chúng tôi chỉ trình bày ở dạng đại số và giải tích cơ bản, mà chúng phù hợp với chương trình phổ thông.

Từ bất đẳng thức AM–GM suy rộng ta có

$$x^a y^b \leqslant \frac{a}{a+b} x^{a+b} + \frac{b}{a+b} y^{a+b} \tag{1.6}$$

với mọi $x, y \geqslant 0,\ a, b > 0$. Nếu đặt $u = x^a,\ v = y^b,\ p = (a+b)/a$ và $q = (a+b)/b$, rõ ràng $p > 1$ và ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q. \tag{1.7}$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Young. Kết quả dưới đây được gọi là bất đẳng thức Hölder.

Định lý 1.1.5 (Bất đẳng thức Hölder)**.** *Cho* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *và* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *là hai bộ* n *số thực dương và* $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Khi đó ta* *có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.8}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_i^p = kb_i^q$ *với mọi* $i \in \{1, 2, , \ldots, n\}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức AM–GM suy rộng với $x, y \geq 0$ ta có

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \tag{1.9}$$

với $p > 1$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dấu bằng xảy ra trong (1.9) khi và chỉ khi $x = y$. Trong bất đẳng thức (1.9), ta đặt

$$x = \frac{a_i^p}{A}, \quad A = \sum_{i=1}^{n} a_i^p;\ y = \frac{b_i^q}{B}, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^q.$$

Cộng lại theo $i = 1, 2, \ldots, n$ ta được

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^q}{B} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra trong (1.8) khi và chỉ khi $\dfrac{a_i^p}{A} = \dfrac{b_i^q}{B}$, tức là $a_i^p = kb_i^q$ với mọi $i \in \{1, 2, , \ldots, n\}$.

□

Nếu $m_i > 0$ với mọi i thì bất đẳng thức Hölder (1.8) có thể viết dạng ở dạng sau

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} m_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nhận xét 1.1.6. ([5, p. 40] Ta có bất đẳng thức sau

$$(x + y)^{\frac{1}{p}} (z + w)^{\frac{1}{q}} \geq x^{\frac{1}{p}} z^{\frac{1}{q}} + y^{\frac{1}{p}} w^{\frac{1}{q}} \tag{1.10}$$

với mọi $x, y, z, w \geq 0$ và $p, q > 1$ với $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Chứng minh được suy ra từ bất đẳng thức Hölder (1.8) bằng cách chọn $n = 2, a_1 = x^{1/p}, a_2 = y^{1/p}$ và $b_1 = z^{1/q}$, $b_2 = w^{1/q}$.

Khi đó ta có

$$x^{\frac{1}{p}}z^{\frac{1}{q}} + y^{\frac{1}{p}}w^{\frac{1}{q}} \le \left((x^{\frac{1}{p}})^p + (y^{\frac{1}{p}})^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left((z^{\frac{1}{q}})^q + (w^{\frac{1}{q}})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= (x+y)^{\frac{1}{p}}(z+w)^{\frac{1}{q}}.$$

Trong chương trình toán phổ thông, bất đẳng thức Hölder được biết đến dưới dạng hệ quả sau.

Hệ quả 1.1.7. (xem [7]) *Nếu $p = q = 2$ thì bất đẳng thức Hölder trở thành*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Bất đẳng thức này có tên là Cauchy–Schwartz. Trong toán học, bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, còn được gọi là bất đẳng thức Schwarz, bất đẳng thức Cauchy, hoặc bằng cái tên khá dài là bất đẳng thức Cauchy–Bunyakovski–Schwarz, đặt theo tên của Augustin Louis Cauchy, Viktor Yakovlevich Bunyakovsky và Hermann Amandus Schwarz, là một bất đẳng thức thường được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn trong đại số tuyến tính dùng cho các vector, trong giải tích dùng cho các chuỗi vô hạn và tích phân của các tích, trong lý thuyết xác suất dùng cho các phương sai và hiệp phương sai. Bất đẳng thức này phát biểu rằng nếu x và y là các phần tử của không gian có tích trong thực hay phức thì $|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

Tuy nhiên trong khuôn khổ luận văn thạc sĩ Toán học, chúng tôi chỉ quan tâm tới một số kết quả trong $\mathbb{R}^n$.

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder ở dạng giải tích, chúng tôi chỉ trình bày kết quả mà không chứng minh.

Định lý 1.1.8 (Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích)**.** *Giả sử (p, q) là cặp số mũ liên hợp, tức là thỏa mãn điều kiện $p, q > 1$ với $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, khi đó*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.11}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho

$$A\,|f(x)|^p = B\,|g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b].$$